

Die Statistik der Elektronenlawinen in elektronegativen Gasen, bei hohen Feldstärken und bei großer Gasverstärkung

Von WERNER LEGLER

Aus dem Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg
(Z. Naturforsch. 16 a, 253–261 [1961]; eingegangen am 15. September 1960)

The statistical distribution of the carrier number of single electron avalanches in a TOWNSEND discharge is described by $v(n) = 1/\bar{n} \exp(-n/\bar{n})$ if one introduces some simplifying assumptions. These assumptions are violated in the case of electronegative gases, in strong electric fields, and in the case of large gas-amplification. In electronegative gases only a part of the primary electrons form observable electron avalanches. These are still subject to an exponential distribution but with an increased mean value. In strong electric fields the ionization probability depends on the previous history of the individual electrons. This leads to a distribution with a marked maximum and a reduced dispersion. In a first approximation the form of the distribution is determined by the quotient $E/\alpha : U_i$. In the case of large gas-amplification the further development of the avalanche is influenced by the space charge and one gets a modified exponential distribution. The calculated distributions agree well with the experiments of other authors.

Unter einer Elektronenlawine verstehen wir hier die Gesamtheit der Elektronen, die ein einzelnes, an der Kathode startendes Elektron durch fortgesetzte Stoßionisation in einem Gas unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes auf seinem Wege zur Anode erzeugt. Aus der statistischen Natur der einzelnen Ionisationsakte und der Tatsache, daß am Anfang einer Lawine nur wenige Elektronen im Spiel sind, folgt für die Gesamtelektronenzahl der Lawine eine statistische Verteilung mit großer Streubreite. Die Wahrscheinlichkeit $v(n)$, daß ein Elektron beim Durchlaufen der Strecke d eine Lawine von n Elektronen erzeugt, ergab sich zu^{1,2}

$$v(n) = (1/\bar{n}) \cdot \exp(-n/\bar{n}). \quad (1)$$

(Dabei ist $\bar{n} = \exp \int \alpha dx$ groß gegen 1 angenommen, α = erster TOWNSEND-Koeffizient.) Für die Ableitung der Verteilung (1) müssen folgende einschränkende Voraussetzungen gemacht werden:

1. Kein Elektron wird durch Anlagerung (Bildung negativer Ionen) oder Rekombination dem Vermehrungsprozeß entzogen.

2. Die Ionisierungswahrscheinlichkeit ist für jedes Elektron unabhängig von dem seit der letzten Ionisation zurückgelegten Weg.

3. Die Eigenraumladung der Lawine hat keinen merklichen Einfluß auf das angelegte elektrische Feld.

In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, welche Verteilungen an die Stelle von (1) treten, wenn jeweils eine dieser einschränkenden Voraussetzungen nicht erfüllt ist.

¹ R. A. WIJSMAN, Phys. Rev. 75, 833 [1949].

I. Der Einfluß der Elektronenanlagerung

Untersucht man Gasentladungen in elektronegativen Gasen, so ist neben dem Ionisationskoeffizienten α der Anlagerungskoeffizient η zu berücksichtigen. Es ist $\eta \cdot dx$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron beim Durchlaufen der Strecke dx in Feldrichtung ein negatives Ion bildet und damit dem weiteren Ionisationsprozeß entzogen wird. Dabei kann dahingestellt bleiben, ob die Bildung des negativen Ions durch einfache Anlagerung erfolgt, oder ob damit eine Dissoziation des Moleküls verbunden ist. Wesentlich ist nur, daß das Elektron hinreichend fest gebunden wird und nicht während des Ablaufs der Elektronenlawine wieder frei wird und erneut in den Ionisierungsprozeß eingreifen kann.

Bei fehlender Elektronenanlagerung genügt zur Kennzeichnung einer Elektronenlawine die Zahl n der Elektronen. Die Zahl der positiven Ionen ist dann eindeutig durch $p = n - 1$ gegeben. Bei Elektronenanlagerung ist das nicht mehr der Fall. Die Zahl p der positiven Ionen ist jetzt wie n eine statistische Variable und kann alle Werte $p \geq n - 1$ annehmen. Die Zahl der negativen Ionen ist natürlich durch die Angabe von n und p eindeutig zu $(p - n + 1)$ bestimmt. Bei nicht-statistischer Behandlung des Problems der Trägervermehrung integriert man für n und p die Differentialgleichungen

$$dn/dx = (\alpha - \eta) \cdot n, \quad dp/dx = \alpha \cdot n \quad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen $n(0) = 1$ und $p(0) = 0$. Im ebenen Feld, wo α und η konstant sind, erhält

² W. LEGLER, Z. Phys. 140, 221 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

man als Lösung

$$n(x) = e^{(\alpha-\eta)x}, p(x) = \frac{\alpha}{\alpha-\eta} (e^{(\alpha-\eta)x} - 1). \quad (3)$$

Bei Beachtung der statistischen Natur der hier ablaufenden physikalischen Prozesse stellt man schon ohne Rechnung eine wesentliche Erscheinung fest, die durch die Differentialgleichungen nicht beschrieben wird. Wenn nämlich das Primärelektron schon angelagert wird bevor es ionisiert hat, so kann es überhaupt nicht zur Entwicklung einer Lawine kommen. Es entstehen also weniger Elektronenlawinen als Primärelektronen an der Kathode ausgelöst werden. Die sich tatsächlich ausbildenden Lawinen müssen dann aber einen größeren Mittelwert der Elektronenzahl haben, als es dem Wert von $\exp([\alpha-\eta]x)$ entspricht.

Berechnung der Verteilung

Wir bezeichnen mit $w(n, p | x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawine nach dem Durchlaufen der Strecke x aus n Elektronen und p positiven Ionen besteht³. Dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung wird durch

$$W(t, s, x) = \sum_n \sum_p w(n, p | x) \cdot t^n \cdot s^p \quad (4)$$

eine erzeugende Funktion zugeordnet⁴. Aus dem Mechanismus der Lawinenentwicklung wird im folgenden eine Differentialgleichung für $W(t, s, x)$ hergeleitet. Die Bestimmung von $w(n, p | x)$ aus der Lösung erfordert die Potenzreihenentwicklung von $W(t, s, x)$ nach t und s . Da dies ohne Schwierigkeiten nur für t möglich ist, beschränken wir uns zunächst darauf, aus dieser Entwicklung die Wahrscheinlichkeit $v(n | x)$ für eine Lawine mit n Elektronen und beliebiger Zahl positiver Ionen zu bestimmen.

Ein an der Kathode ($x=0$) startendes Elektron durchläuft mit der Wahrscheinlichkeit $[1 - (\alpha + \eta) dx]$ ungestört die Wegstrecke dx . Mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha \cdot dx$ wird auf dieser Strecke ein zusätzliches Elektron und ein positives Ion erzeugt, während mit der Wahrscheinlichkeit $\eta \cdot dx$ das Elektron angelagert ist, so daß wir eine „Lawine“ mit $n=0$, $p=0$ erhalten. Diese Überlegung führt zu folgender Darstellung für

³ Bei den Argumenten einer Verteilungsfunktion stehen vor dem senkrechten Strich die statistischen Variablen (hier: n, p) und dahinter die Parameter (hier: x).

⁴ Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, sind hier Sum-

$$\begin{aligned} w(n, p | x + dx) : \\ w(n, p | x + dx) &= [1 - (\alpha + \eta) dx] \cdot w(n, p | x) \\ &+ \alpha dx \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{p-1} w(k, j | x) \cdot w(n-k, p-1-j | x) \\ &+ \eta dx \delta_{0n} \delta_{0p}. \end{aligned} \quad (5)$$

Für die erzeugende Funktion leitet man hieraus die Differentialgleichung

$$\partial W / \partial x = \alpha \cdot s \cdot W^2 - (\alpha + \eta) \cdot W + \eta \quad (6)$$

ab. Für $x=0$ ist nur ein Elektron und kein positives Ion vorhanden, also $w(1, 0 | 0) = 1$ und $w(n, p | 0) = 0$ für $(n, p) \neq (1, 0)$. Dies ergibt nach (4) für W die Anfangsbedingung

$$W(t, s, 0) = t. \quad (7)$$

In dem allgemeinen Fall eines beliebigen elektrischen Feldes sind die Koeffizienten α und η Funktionen von x . Gl. (6) stellt dann eine Riccati'sche Differentialgleichung dar, die in dieser Allgemeinheit nicht durch Quadraturen integriert werden kann. Beschränkt man sich aber auf das ebene Feld, so sind α und η konstant und für die Anfangsbedingung (7) erhält man die Lösung

$$W(t, s, x) = \frac{W_1 \cdot W_2 (e^{\alpha(s) \cdot x} - 1) - t (W_2 \cdot e^{\alpha(s) \cdot x} - W_1)}{(W_1 \cdot e^{\alpha(s) \cdot x} - W_2) - t (e^{\alpha(s) \cdot x} - 1)} \quad (8)$$

mit $W_1, W_2 = \text{Nullstellen von } \alpha \cdot s \cdot W^2 - (\alpha + \eta) W + \eta$,
 $a(s) = \sqrt{(\alpha + \eta)^2 - 4 s \alpha \eta}$.

Die Bestimmung von $w(n, p | x)$ erfordert die Potenzreihenentwicklung von $W(t, s, x)$ nach t und s . Dies ist aber ohne Schwierigkeiten nur für t möglich.

$$\begin{aligned} W(t, s, x) &= \sum_n \varphi_n(s, x) \cdot t^n, \\ \varphi_0(s, x) &= \frac{W_1 \cdot W_2 (e^{\alpha(s) x} - 1)}{W_1 \cdot e^{\alpha(s) x} - W_2}, \\ \varphi_n(s, x) &= \frac{(W_1 - W_2)^2 \cdot (e^{\alpha(s) x} - 1)^{n-1} \cdot e^{\alpha(s) x}}{(W_1 \cdot e^{\alpha(s) x} - W_2)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Diese Entwicklung nach t erlaubt uns, Aussagen über die Verteilung der Elektronenzahlen der Lawinen zu machen. Sei $v(n | x)$ die Wahrscheinlichkeit für eine Lawine mit n Elektronen bei beliebiger Zahl von positiven Ionen. Aus der Beziehung

$$v(n | x) = \sum_p w(n, p | x) \quad (10)$$

folgt für die zur Verteilung $v(n | x)$ gehörende erzeugende Funktion

$$V(t, x) = \sum_n v(n | x) \cdot t^n = W(t, 1, x). \quad (11)$$

Nach (9) ist dann $v(n | x) = \varphi_n(1, x)$. (12)

mationen stets von 0 bis ∞ zu erstrecken. Obwohl nach dem vorhergehenden $w(n, p | x) \equiv 0$ für $p < n-1$, summieren wir der einfacheren Indizierung wegen auch in p von 0 bis ∞ .

Somit wird

$$v(n|x) = \begin{cases} \frac{\eta}{\alpha} \cdot \frac{e^{(\alpha-\eta)x}-1}{e^{(\alpha-\eta)x}-\eta/\alpha} & \text{für } n=0, \\ \left(\frac{1-\eta/\alpha}{e^{(\alpha-\eta)x}-\eta/\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{e^{(\alpha-\eta)x}-1}{e^{(\alpha-\eta)x}-\eta/\alpha} \right)^{n-1} \\ \cdot e^{(\alpha-\eta)x} & \text{für } n>0. \end{cases} \quad (13)$$

Diese Verteilung kann noch vereinfacht werden, wenn wir $\exp[(\alpha-\eta)x] \gg 1$ voraussetzen, was bei den meisten Anwendungen erfüllt sein dürfte. In diesem Falle erhalten wir die Näherungsdarstellung

$$v(n|x) = \begin{cases} \eta/\alpha & \text{für } n=0, \\ \frac{(1-\eta/\alpha)^2}{e^{(\alpha-\eta)x}} \cdot \exp\left(-n \cdot \frac{1-\eta/\alpha}{e^{(\alpha-\eta)x}}\right) & \text{für } n>0. \end{cases} \quad (14)$$

Hieraus entnehmen wir, daß von den an der Kathode startenden Primärelektronen der Bruchteil η/α keine Elektronenlawine bildet, da vor dem Erreichen der Anode das Primärelektron und alle eventuell durch Ionisation gebildeten weiteren Elektronen durch Anlagerung gebunden worden sind. Dagegen entwickeln sich aus dem Bruchteil $(1-\eta/\alpha)$ Elektronenlawinen, wobei die Elektronenzahl einem exponentiellen Verteilungsgesetz unterliegt. Der Mittelwert der Elektronenzahl für diese sich voll ausbildenden Lawinen ist größer als der nicht-statistische Wert $\exp[(\alpha-\eta)x]$ nach (3). Wir erhalten

$$\bar{n}^*(x) = \frac{e^{(\alpha-\eta)x}}{1-\eta/\alpha}, \quad (15)$$

wobei der Stern andeuten soll, daß hier nur über die Lawinen mit $n>0$ gemittelt wurde. Schließt man die Lawinen mit $n=0$ in die Mittelung ein, so ergibt sich natürlich $\bar{n}(x) = \exp[(\alpha-\eta)x]$.

Die Entwicklung der Lawinen

In einer früheren Arbeit² wurde festgestellt, daß die mittlere Entwicklung einer Elektronenlawine von n Trägern bei fehlender Elektronenanlagerung durch die Beziehung

$$\bar{n}_1(x) = 1 + \frac{n}{\bar{n}} \cdot (e^{\alpha x} - 1) \quad (16)$$

beschrieben wird ($\bar{n} = e^{\alpha d}$). Dabei war $\bar{n}_1(x)$ der Mittelwert der Verteilung $W_n(n_1|x)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, daß eine Lawine, die nach dem Durchlaufen der Strecke d aus n Trägern bestehen wird, an der Stelle x schon n_1 Elektronen umfaßt. Führen wir die entsprechenden Rechnungen unter Heranziehung der Verteilungen (13) und (14)

für den Fall der Elektronenanlagerung durch, so ergibt sich

$$\bar{n}_1(x) = 1 + \left(2 - \frac{n}{\bar{n}^*}\right) \frac{\eta}{\alpha-\eta} (1 - e^{-(\alpha-\eta)x}) + \frac{n}{\bar{n}^*} \frac{\alpha}{\alpha-\eta} (e^{(\alpha-\eta)x} - 1). \quad (17)$$

Dabei ist $\bar{n}^* = \bar{n}^*(d)$. Diese Entwicklung der Elektronenzahl ist in Abb. 1 für verschiedene Werte von

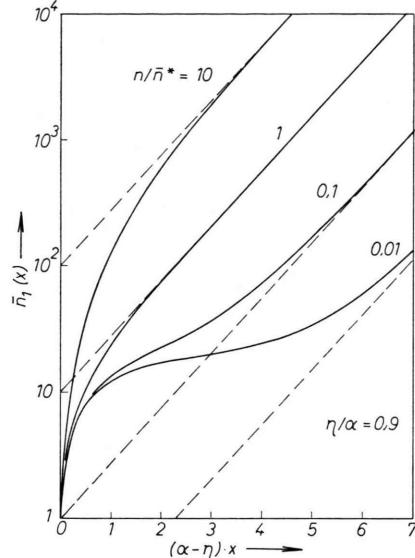


Abb. 1. Mittlerer Verlauf der Entwicklung von Elektronenlawinen bei Elektronenanlagerung für verschiedene Werte von n/\bar{n}^* .

n/\bar{n}^* dargestellt, wobei für η/α der Wert 0,9 angenommen wurde, um die bei Elektronenanlagerung neu auftretenden Effekte besonders deutlich zu machen. Die Elektronenzahl nimmt im Anfang nahezu unabhängig von n/\bar{n}^* sehr rasch zu. Dies ist offenbar erforderlich, um überhaupt eine nicht abreißende Lawine zu bilden. Während die Lawinen mit einer Elektronenzahl über \bar{n}^* sich weiter stark vermehren, um dann asymptotisch in den Grenzwert

$$(n/\bar{n}^*) \cdot [\alpha/(\alpha-\eta)] \cdot \exp[(\alpha-\eta)x]$$

einzulaufen, findet man bei den kleinen Lawinen eine gewisse Stagnation bei einer Elektronenzahl $1 + 2 \cdot \eta/(\alpha-\eta)$ und erst dann den Übergang in das exponentielle Wachstum.

Die positiven Ionen

Wollen wir zu näheren Angaben über die Zahl der durch eine Elektronenlawine erzeugten positiven Ionen gelangen, so müssen wir uns mit der Wahr-

scheinlichkeit $u(p|n, x)$ befassen, daß eine Lawine mit n Elektronen p positive Ionen erzeugt hat. Es ist

$$u(p|n, x) = \frac{w(n, p|x)}{v(n|x)}. \quad (18)$$

Für die zu $u(p|n, x)$ gehörende erzeugende Funktion

$$U(s, n, x) = \sum_p u(p|n, x) \cdot s^p \quad (19)$$

gilt nach (4), (9) und (18)

$$U(s, n, x) = \frac{\varphi_n(s, x)}{\varphi_n(1, x)}. \quad (20)$$

Wie bereits oben gesagt, ist die Bestimmung von $u(p|n, x)$ durch Potenzreihenentwicklung nicht ohne weiteres möglich. Jedoch kann in bekannter Weise Mittelwert und Streuung der Verteilung durch Differentiation der erzeugenden Funktion gewonnen werden⁵. Unter der Voraussetzung $n \gg 1$ und $\exp[(\alpha - \eta)x] \gg 1$ erhält man

$$\begin{aligned} \bar{p}(n) &= (n-1) \frac{\alpha}{\alpha-\eta}, \\ [p - \bar{p}(n)]^2 &= \bar{p}(n) \frac{\eta(\alpha+\eta)}{(\alpha-\eta)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die relative Streuung der Ionenzahl um den Mittelwert $\bar{p}(n)$ ist damit zu

$$\sigma = \sqrt{\frac{[p - \bar{p}(n)]^2}{\bar{p}(n)}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{p}(n)}} \frac{\sqrt{\eta(\alpha+\eta)}}{\alpha-\eta} \quad (22)$$

gegeben. Diese Streuung ist im allgemeinen so klein, daß sie vernachlässigt werden kann.

Für die Zahl der positiven Ionen der sich voll entwickelnden Lawinen ergibt sich durch diese enge Korrelation mit der Elektronenzahl näherungsweise ebenfalls eine exponentielle Verteilung, deren Mittelwert \bar{p}^* jedoch um den Faktor $\alpha/(\alpha-\eta)$ größer ist als die mittlere Elektronenzahl \bar{n}^* nach (15).

$$\bar{p}^* = \left(\frac{\alpha}{\alpha-\eta} \right)^2 \cdot e^{(\alpha-\eta)x}. \quad (23)$$

Von FROMMHOLD⁶ konnte der exponentielle Charakter der Verteilung in Sauerstoff experimentell bestätigt werden. Der Mittelwert dieser Verteilungen zeigte befriedigende Übereinstimmung mit den aus (23) unter Verwendung von α - und η -Werten anderer Autoren berechneten Werten. Die mittlere Ionenzahl der Lawinen ist also um den Faktor $\alpha/(\alpha-\eta)$

⁵ Es gilt $\bar{p} = \frac{d}{ds} \ln U \Big|_{s=1}$
und $\overline{(p-\bar{p})^2} = \frac{d}{ds} \left(s \cdot \frac{d}{ds} \ln U \right) \Big|_{s=1}$.

größer als der nicht-statistische Mittelwert nach (3). Dieser Faktor kann für niedrige Werte von E/p , bei denen η dem Wert von α nahekommt, durchaus beachtlich sein. Von SCHLUMBOHM⁷ wurde die Beziehung (23) mit Erfolg zur Bestimmung von α und η in Sauerstoff herangezogen.

II. Die Wirkung hoher Feldstärken

Bei der Ableitung der normalen Lawinenverteilung (1) mußte vorausgesetzt werden, daß allen Elektronen des Schwarmes die gleiche Ionisationswahrscheinlichkeit α zukommt, unabhängig von der Länge des seit der letzten Ionisation zurückgelegten Weges. Im Mittel hat dieser Weg in Feldrichtung die Länge $1/\alpha$. Ist $1/\alpha$ groß gegen die Weglänge U_i/E , die ein Elektron mindestens zurücklegen muß, um erneut die Ionisationsenergie aufzunehmen, d. h. ist $E/\alpha \gg U_i$, so kann obige Voraussetzung als erfüllt angesehen werden.

Der Quotient $E/\alpha : U_i$ zeigt als Funktion der reduzierten Feldstärke E/p den in Abb. 2 am Beispiel

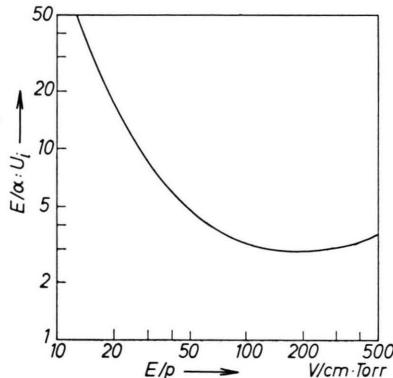


Abb. 2. Verlauf des Quotienten $E/\alpha : U_i$ als Funktion von E/p in Argon.

des Argons dargestellten typischen Verlauf. Mit wachsender Feldstärke nimmt E/α stark ab, so daß bei hohen Werten von E/p Abweichungen von der normalen Lawinenverteilung zu erwarten sind. Dies wurde auch bei experimentellen Untersuchungen in verschiedenen Gasen und Dämpfen gefunden⁸. Dabei ergab sich $E/\alpha \approx 20 U_i$ als Grenze für die Gültigkeit der normalen Lawinenverteilung. Im folgenden soll eine theoretische Ableitung der modifizierten

⁶ L. FROMMHOLD, Z. Phys. 150, 172 [1958].

⁷ H. SCHLUMBOHM, Z. angew. Phys. 11, 156 [1959].

⁸ H. SCHLUMBOHM, Z. Phys. 151, 563 [1958] und Diplomarbeit, Hamburg 1958.

Lawinenverteilung mit Hilfe eines Modellgases geben werden.

Das Modellgas

Der Ionisationskoeffizient α ist definiert für einen Elektronenschwarm, dessen Energieverteilung den der Feldstärke E entsprechenden stationären Zustand angenommen hat. Wir klassifizieren nun die Elektronen nach dem seit der letzten Ionisation in Feldrichtung zurückgelegten Weg ξ . Denjenigen Elektronen, die zu einem und demselben Wert ξ gehören, kann wieder ein Ionisationskoeffizient $a(\xi)$ zugeordnet werden, der aber offensichtlich von ξ abhängt. Für ξ zwischen 0 und U_i/E wird $a(\xi)$ etwa gleich Null sein, da ein Elektron in der Gasentladung nach einer Ionisation nur noch eine geringe kinetische Energie besitzt. Für größere ξ wächst $a(\xi)$ und wir können annehmen, daß $a(\xi)$ für ξ gegen ∞ einem Grenzwert zustrebt, da die Elektronen außer durch Ionisation auch durch andere Prozesse Energie abgeben können. Für $a(\xi)$ ist somit der in Abb. 3 a skizzierte Verlauf zu erwarten.

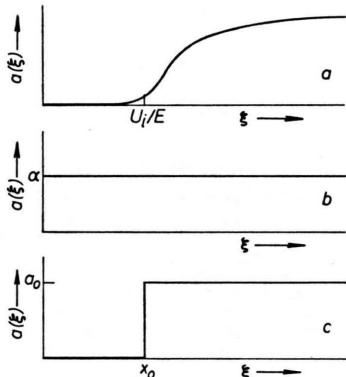


Abb. 3. Verlauf des Ionisierungskoeffizienten $a(\xi)$ als Funktion des seit der letzten Ionisation zurückgelegten Weges ξ . a) Schematischer Verlauf in einem realen Gas. b) Idealisierung für $E/\alpha \gg U_i$. c) Ionisierungskoeffizient im Modellgas.

War es möglich, für $E/\alpha \gg U_i$ die statistische Verteilung der Elektronenlawinen gut zu beschreiben, wenn für $a(\xi)$ die in Abb. 3 b dargestellte Näherung $a(\xi) = \alpha$ benutzt wird, so ist zu erwarten, daß wir durch die in Abb. 3 c skizzierte Funktion $a(\xi)$ eine auch noch für kleinere Werte von E/α gültige Beschreibung der Verteilungen erhalten. Wir untersuchen demnach im folgenden statt des realen Gases mit $a(\xi)$ nach Abb. 3 a ein Modellgas mit

$$a(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \xi < x_0, \\ a_0 & \text{für } x_0 \leq \xi. \end{cases} \quad (24)$$

Es erhebt sich nun die Frage, welche Werte die Parameter a_0 und x_0 annehmen müssen, damit unser Modell das Verhalten des realen Gases möglichst gut wiedergibt. Unsere erste Forderung ist, daß sich in beiden Fällen der gleiche Ionisationskoeffizient α des Gesamtschwarmes im stationären Zustand ergibt.

Zwischen $a(\xi)$ und α besteht folgender Zusammenhang. Sei $n(x, \xi) d\xi$ die Zahl der Elektronen, die von der Kathode aus den Weg x zurückgelegt haben und in das Intervall $\xi \dots \xi + d\xi$ einzuordnen sind. Für $n(x, \xi)$ gilt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} n(x, \xi) = - \frac{\partial}{\partial \xi} n(x, \xi) - a(\xi) \cdot n(x, \xi), \quad (25)$$

wobei für $\xi = 0$ die Randbedingung

$$n(x, 0) = 2 \int_0^\infty a(\xi) \cdot n(x, \xi) d\xi \quad (26)$$

zu erfüllen ist. (Die Randbedingung für $x = 0$ ist hier ohne Bedeutung.) Für den stationären Zustand des Elektronenschwarmes, für den ja α definiert ist, muß für $n(x, \xi)$ die Produktdarstellung

$$n(x, \xi) = n(x) \cdot f(\xi) \quad (27)$$

gelten. Mit der Normierung $\int_0^\infty f(\xi) d\xi = 1$ ist $n(x)$ die Gesamtelektronenzahl des Schwarmes. Aus (25) bis (27) folgt als Lösung

$$n(x) = A \cdot e^{\alpha x}, \quad f(\xi) = 2 \alpha \cdot e^{-\alpha \xi} \cdot \exp \left(- \int_0^\xi a(\xi') d\xi' \right), \quad (28)$$

wobei α die Bedingungsgleichung

$$\int_0^\infty a(\xi) \cdot e^{-\alpha \xi} \cdot \exp \left(- \int_0^\xi a(\xi') d\xi' \right) \cdot d\xi = \frac{1}{2} \quad (29)$$

erfüllen muß.

Setzt man in die Bedingungsgleichung (29) die Funktion $a(\xi)$ unseres Modellgases nach (24) ein, so erhält man zwischen a_0 , x_0 und α die Beziehung

$$a_0 = \frac{\alpha}{2 \cdot e^{-\alpha x_0} - 1}. \quad (30)$$

Für x_0 ist hiernach noch jeder Wert zwischen 0 und $(\ln 2)/\alpha$ möglich. Eine an sich wünschenswerte Bestimmung von x_0 von der Art, daß die zugehörige Verteilung $f(\xi)$ möglichst gut der im realen Gas entspricht, ist nicht möglich, da über diese Verteilung nichts Näheres bekannt ist. Wir betrachten daher x_0 als freien Parameter, mit dem eine Anpassung der theoretischen Verteilung an gemessene Kurven ermöglicht wird. Dabei erwarten wir aber, daß sich x_0 etwa gleich U_i/E ergibt, da der wesentliche Anstieg der Funktion $a(\xi)$ beim realen Gas in der Umgebung von $\xi = U_i/E$ erfolgen sollte.

Die Statistik der Elektronenlawinen im Modellgas

Sei wieder $v(n|x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Lawine nach dem Durchlaufen der Strecke x aus n Elektronen besteht. Ist $x > x_0$, so gilt für $v(n|x+dx)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} v(n|x+dx) &= (1 - a_0 dx) \cdot v(n|x) \\ &\quad + a_0 dx \cdot \sum_{k=1}^{n-1} v(k|x-x_0) \cdot v(n-k|x-x_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Diese Beziehung ist leicht abzuleiten, wenn man sich die Strecke $x+dx$ in den Teilstrecken $x_0, dx, x-x_0$ von der Lawine durchlaufen denkt. Aus (31) folgt das System (32) von unendlich vielen Differenzen-Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v(n|x) + a_0 \cdot v(n|x) &= (32) \\ &= a_0 \sum_{k=1}^{n-1} v(k|x-x_0) \cdot v(n-k|x-x_0), \\ v(n|x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } n=1, \\ 0 & \text{für } n \neq 1, \end{cases} \quad x < x_0, \end{aligned}$$

Das frühere Verfahren, ein derartiges System mit Hilfe einer erzeugenden Funktion zu lösen, ist hier nicht brauchbar, da die Lösung abschnittsweise für $0 \dots x_0, x_0 \dots 2x_0$, usw. durchgeführt werden müßte. Wir werden uns deshalb darauf beschränken, die Verteilung für große x und d , d. h. für $e^{\alpha x} \gg 1$ und $n \gg 1$ zu berechnen. In diesem Fall kann aber neben Gl. (32) noch die allgemeine Gleichung für Lawinenverteilungen

$$\frac{\partial}{\partial x} v(n|x) + \frac{\partial}{\partial n} [n \alpha v(n|x)] = 0 \quad (33)$$

herangezogen werden, die im Anhang 1 abgeleitet wird. Ist $\alpha = \text{const}$, so lautet das allgemeine Integral von (33)

$$v(n|x) = \frac{1}{n(x)} \varphi[n/\bar{n}(x)]. \quad (34)$$

Dabei ist φ eine willkürliche Funktion und $\bar{n}(x)$ ist der Mittelwert der Elektronenzahl. [Näheres über $\bar{n}(x)$ für das Modellgas im Anhang 2.] Die Funktion φ wird dadurch bestimmt, daß wir (34) in (32) einsetzen. Bezeichnen wir die normierte Elektronenzahl $n/\bar{n}(x)$ mit ν , so ergibt sich für φ die

⁹ Die Rechnungen wurden mit dem Magnettrommelrechner IBM 650 des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg durchgeführt. Den an der Rechenanlage tätigen Mitarbeitern des Instituts danke ich für die Hilfe bei der Ausführung der Rechnung.

Integrodifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \nu \alpha \varphi' - (a_0 - \alpha) \varphi &= (35) \\ &\quad + a_0 e^{\alpha x_0} \int_0^{\nu e^{\alpha x_0}} \varphi(\nu') \varphi(\nu e^{\alpha x_0} - \nu') d\nu' = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wurde numerisch für den Bereich $\nu = 0 \dots 4$ gelöst, wobei für den Parameter αx_0 die Werte 0 bis 0,25 in Stufen von 0,05 eingesetzt wurden ⁹. Die Ergebnisse sind in Abb. 4 dargestellt. Der

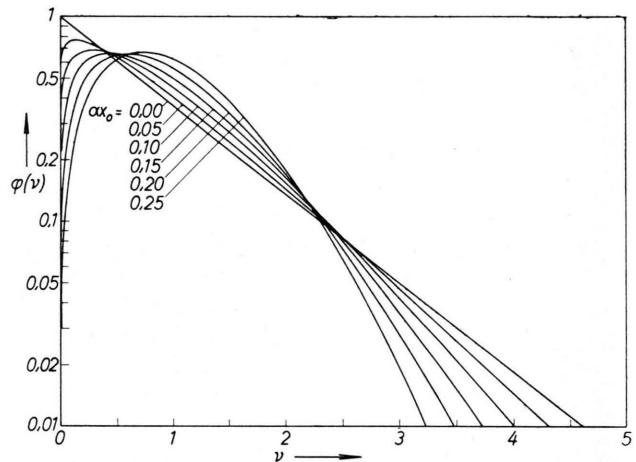


Abb. 4. Lawinenverteilung im Modellgas für verschiedene Werte von αx_0 als Funktion der reduzierten Trägerzahl $\nu = n/n$.

wesentliche Unterschied dieser Verteilungen gegenüber der normalen Lawinenverteilung besteht darin, daß sie nicht mehr monoton fallend sind. Es bildet sich vielmehr ein Maximum aus, welches sich mit wachsendem αx_0 von 0 nach 1 verschiebt (Tab. 1).

αx_0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
ν_{\max}	0,126	0,28	0,44	0,63	0,74

Tab. 1.

Vergleich mit den Experimenten

Zum Vergleich der für das Modellgas berechneten Verteilungen werden die früher von SCHLUMBOHM ⁸ mitgeteilten Messungen herangezogen. In Abb. 5 ist als Beispiel eine in Methylal bei $E/p = 186,5$ aufgenommene Verteilung wiedergegeben. Die optimal angepaßte theoretische Kurve hat den Parameterwert $\alpha x_0 = 0,18$. Damit stimmt praktisch der Wert $\alpha \cdot U_i/E = 0,19$ der gemessenen Kurve überein. Im ganzen wurden 16 gemessene Verteilungen mit den theoretischen Kurven verglichen. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 dargestellt. Das Anpassungsverfahren

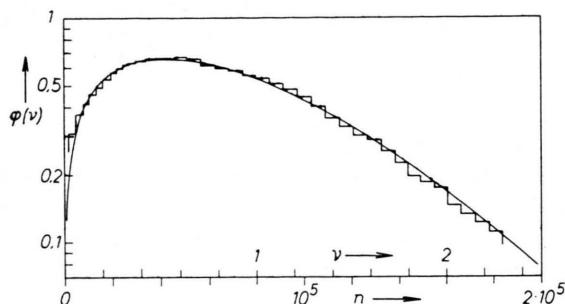


Abb. 5. Lawinenverteilung in Methylal nach SCHLUMBOHM⁸. $E/p = 186,5$ Volt/cm · Torr, $\alpha \cdot U_i/E = 0,19$. Ausgezogene Kurve: Theoretische Verteilung im Modellgas für $\alpha x_0 = 0,18$.

Experimentelle Verteilung			Optimaler Parameter der theor. Kurve αx_0
Gas	E/p V/cm · Torr	$\alpha \cdot U_i/E$	
Methan	57,2	0,060	0,04
	64	0,066	0,06
	75	0,098	0,08
	97	0,145	0,12
	169	0,216	0,20
	221	0,213	—
	281	0,208	—
Methylal	76,5	0,044	0,04
	105	0,095	0,08
	186,5	0,190	0,18
	246	0,210	0,20
	426	0,244	0,27
Alkohol	76	0,062	0,05
	92	0,095	0,08
Aceton	104	0,044	0,04
	322	0,168	0,17

Tab. 2.

erlaubt, αx_0 etwa mit einem Fehler von $\pm 0,01$ zu bestimmen.

Aus diesem Vergleich ergibt sich, daß in fast allen Fällen die gemessene Verteilung durch eine für das Modellgas berechnete Kurve dargestellt werden kann. Eine Ausnahme machen nur die zwei bei $E/p = 221$ und 281 in Methan aufgenommenen Verteilungen. Wie aus der Tabelle hervorgeht, durchläuft α/E als Funktion von E/p ein Maximum und bei den angegebenen Werten liegt α/E schon jenseits des Maximums. Hier scheint also eine erhebliche Änderung der Ionisierungsfunktion $\alpha(\xi)$ einzutreten, so daß unser einfaches Modell nicht mehr zur Beschreibung ausreicht. In den übrigen Fällen lag α/E diesseits des Maximums und es ist gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den be-

¹⁰ H. RAETHER, Ergebni. exakt. Naturw. 22, 73 [1949].

rechneten Verteilungen zu erzielen, wobei auch der sich für optimale Anpassung ergebende Parameterwert αx_0 etwa dem erwarteten Wert $\alpha \cdot U_i/E$ entspricht.

III. Der Einfluß der Eigenraumladung

Entwickelt sich eine Elektronenlawine zu so großen Trägerzahlen, daß die Raumladung der Ionen und Elektronen eine merkliche Feldänderung herbeiführt, so ist der Ionisierungskoeffizient α in den verschiedenen Teilen des Elektronenschwarmes nicht mehr konstant¹⁰. Die weitere Trägervermehrung kann jedoch durch den Mittelwert von α beschrieben werden, der nun als zusätzliche Variable die Trägerzahl n enthält.

Wir legen unseren Betrachtungen wieder eine ebene Entladungsstrecke zugrunde und bezeichnen mit x_0 den Ionisierungskoeffizienten für den raumladungsfreien Fall. $\alpha(n)$ sei der trägerzahlabhängige Mittelwert von α . Der Verteilungsfunktion $v(n|x)$ wird durch

$$V(n|x) = \int_n^\infty v(n|x) \cdot dn \quad (36)$$

die integrale Verteilung $V(n|x)$ zugeordnet. Da wir uns auch hier nur für den Verlauf der Verteilung für $n \gg 1$ interessieren, können wir die allgemeine Gleichung für Lawinenverteilungen aus dem Anhang 1 heranziehen. Integration dieser Gleichung liefert für $V(n|x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} V + n \cdot \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial n} V = 0. \quad (37)$$

Das allgemeine Integral von (37) lautet

$$V(n|x) = \psi \left(x - \int_1^n \frac{dn}{n \cdot \alpha(n)} \right), \quad (38)$$

wobei ψ eine willkürliche differenzierbare Funktion ist, welche die Bedingung $\psi(0) = 1$ erfüllt. Zur Bestimmung dieser Funktion beachten wir, daß für kleine n die Raumladung noch keine Rolle spielt, also $\alpha(n) = \alpha_0$ ist und $V(n|x)$ in die bekannte Funktion $\exp(-n e^{-\alpha_0 x})$ übergeht. Für die Funktion $\psi(u)$ folgt daraus

$$\psi(u) = \exp(-e^{-\alpha_0 u}). \quad (39)$$

Damit wird schließlich

$$V(n|x) = \exp \left\{ -\exp \left(-\alpha_0 x + \int_1^n \frac{\alpha_0}{\alpha(n)} \frac{dn}{n} \right) \right\}. \quad (40)$$

Wie von FROMMHOLD⁶ und SCHLUMBOHM⁷ gezeigt wurde, kann die normale Trägerzahlstatistik mit Erfolg zur experimentellen Bestimmung des Stoßionisationskoeffizienten α herangezogen werden. Im Falle großer Trägerzahlen wird man versuchen, sowohl α_0 als auch $\alpha(n)$ aus den aufgenommenen Verteilungen zu ermitteln.

Um α_0 zu erhalten, benutzt man die Beziehung

$$v(1|x) = e^{-\alpha_0 x}, \quad (41)$$

wobei experimentell $v(1|x)$ als Grenzwert von $v(n|x)$ für kleine n zu verstehen ist, da $v(1|x)$ der unmittelbaren Messung nicht zugänglich ist. Zur Bestimmung von $\alpha(n)$ kann die aus (40) folgende Beziehung

$$\frac{\alpha_0}{\alpha(n)} = \frac{\partial}{\partial \ln n} \ln[-\ln V(n|x)] \quad (42)$$

herangezogen werden. Zur numerischen Berechnung ist die äquivalente Formulierung

$$\frac{\alpha(n)}{\alpha_0} = \frac{V(n|x) \cdot [-\ln V(n|x)]}{n \cdot v(n|x)} \quad (42a)$$

besser geeignet. Abb. 6 zeigt die Auswertung einer von SCHLUMBOHM⁸ in Methylal aufgenommenen Sta-

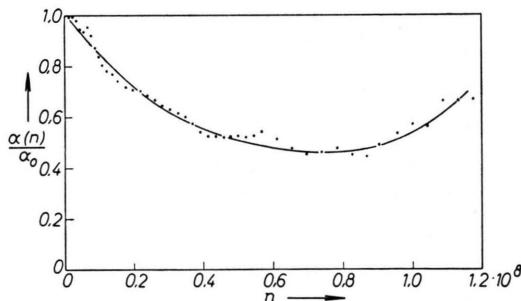


Abb. 6. Durch Raumladung geschwächter Ionisationskoeffizient $\alpha(n)$. Ermittelt aus einer Statistik in Methylal nach SCHLUMBOHM⁸ (Versuchsdaten im Text).

tistik (Versuchsdaten: $p = 139$ Torr, $d = 0,5$ cm, $E/p = 74,8$ V/cm · Torr, $\alpha_0 d = 18,6$). Die starke Abnahme von α mit wachsendem n ist deutlich zu erkennen¹¹. Sie ist auf die Schwächung des elektrischen Feldes im Gebiet der Elektronenwolke durch die positive Raumladung der Ionen zurückzuführen (vgl. Anm. 8, 12, 13). Die im Gebiet $n = 10^8$ bemerkbare erneute Zunahme von α scheint eine Vorstufe des Kanalaufbaus darzustellen. Darauf deuten auch die Ergebnisse neuerer Messungen von RICHTER¹⁴ hin.

¹¹ Ähnlich wie in Fig. 2 bei RICHTER¹³.

¹² L. FROMMHOLD, Z. Phys. **156**, 144 [1959].

Die im raumladungsfreien Fall mögliche Berechnung der mittleren Gasverstärkung durch Integration der TOWNSENDschen Gleichung

$$dn = n \alpha dx \quad (43)$$

mit der Anfangsbedingung $n(0) = 1$ ist im Raumladungsfall nicht mehr gültig, da dann α selbst von n abhängt. Eine über eine allgemeine Berechnungsvorschrift [z. B. $\bar{n}(x) = \int_0^\infty V(n|x) \cdot dn$] hinausgehende Darstellung von $\bar{n}(x)$ ist ohne die spezielle Kenntnis von $\alpha(n)$ nicht möglich. Bezeichnet man aber das Integral $n(x)$ der TOWNSENDschen Trägervermehrungsgleichung als Aufbaugesetz der Lawinen, so hat dies natürlich auch für den Raumladungsfall seine Berechtigung, da es die asymptotische Entwicklung der Lawinen beschreibt. Es ist aber hier nur die implizite Darstellung des Aufbaugesetzes in der Form

$$x = \int_1^{n(x)} \frac{dn}{n \cdot \alpha(n)} \quad (44)$$

möglich. Da $\alpha(n)$ aus der Trägerzahlstatistik bestimmt werden kann, ist dies auch für das Aufbaugesetz möglich. Aus einer bei $x = d$ aufgenommenen Verteilung $V(n|d)$ erhält man nach (42) und (44) für $n(x)$ die Beziehung

$$\alpha_0(x-d) = \ln[-\ln V(n(x)|d)]. \quad (45)$$

Den Herren Dr. L. FROMMHOLD und Dipl.-Phys. H. SCHLUMBOHM danke ich für die Überlassung von Meßergebnissen und für zahlreiche Diskussionen.

Anhang 1

Eine allgemeine Differentialgleichung für Lawinenverteilungen

Wir betrachten den allgemeinen Fall, daß der Ionisationskoeffizient α sowohl vom Ort x als auch von der Trägerzahl n der Lawine abhängt. Dann ist $n \alpha(x, n) dx$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein neues Elektron erzeugt wird, wenn der Schwerpunkt des aus n Elektronen bestehenden Schwarmes von der Stelle x aus um dx in Feldrichtung fortschreitet. Für die Wahrscheinlichkeit $v(n|x)$, daß eine Lawine, welche die Strecke x in Feldrichtung zurückgelegt hat, aus n Elektronen besteht, gilt die Beziehung

$$v(n|x+dx) = [1 - n \cdot \alpha(x, n) \cdot dx] \cdot v(n|x) + [(n-1) \cdot \alpha(x, n-1) \cdot dx] \cdot v(n-1|x). \quad (46)$$

¹³ K. RICHTER, Z. Phys. **157**, 130 [1959].

¹⁴ K. RICHTER, Z. Phys. **158**, 312 [1960].

Eine Lawine, die an der Stelle x aus n Elektronen besteht, ändert nämlich mit der Wahrscheinlichkeit $[1 - n \cdot \alpha(x, n) \cdot dx]$ bis zur Stelle $x + dx$ ihre Elektronenzahl nicht, während eine bei x aus $(n-1)$ Elektronen bestehende Lawine mit der Wahrscheinlichkeit $(n-1) \cdot \alpha(x, n-1) \cdot dx$ bis zur Stelle $x + dx$ auf n Elektronen angewachsen ist. Beschränken wir uns nun auf den Bereich $n \gg 1$, so kann n als kontinuierliche Variable aufgefaßt werden und aus (46) folgt für $v(n|x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial n} (n \alpha v) = 0. \quad (47)$$

Anhang 2

Mittelwert der Trägerzahl von Lawinen im Modellgas

Die Elektronen im Modellgas haben den Ionisationskoeffizienten 0 oder a_0 , je nachdem ob sie bereits einen kürzeren oder längeren Weg als x_0 seit der letzten Ionisation zurückgelegt haben. Sei $n_a(x)$ die Zahl der Elektronen, die ionisieren können, so gilt für die Gesamtelektronenzahl $n(x)$ der Lawine

$$dn/dx = a_0 \cdot n_a(x). \quad (48)$$

Dabei sind unter n und n_a hier die Mittelwerte zu verstehen, auch wenn wir dies nicht besonders kennzeichnen. $n_a(x)$ ist gegeben durch die Zahl der Elektronen $n(x-x_0)$, die bereits bei $x-x_0$ vorhanden waren, von denen aber die Zahl derjenigen Elektronen abzuziehen ist, die zwischen $x-x_0$ und x ionisiert haben. Diese Zahl ist durch $n(x) - n(x-x_0)$ gegeben. Somit ergibt sich für $n(x)$ die Differenzendifferentialgleichung

$$\begin{aligned} dn/dx &= a_0 \cdot [2n(x-x_0) - n(x)] \quad \text{für } x > x_0, \\ n(x) &= 1 \quad \text{für } 0 < x < x_0. \end{aligned} \quad (49)$$

Der zweite Teil von Gl. (49) folgt aus der Tatsache, daß die Elektronen bei $x=0$ starten und daher zwis-

schen 0 und x_0 nicht ionisieren können. Die Integration von (49) erfolgt durch Anwendung der LAPLACE-Transformation. Für

$$f(p) = \int_0^\infty n(x) e^{-px} dx$$

folgt aus (49)

$$f(p) = \frac{p+a_0(1-e^{-px_0})}{p[p-a_0(2e^{-px_0}-1)]}. \quad (50)$$

Zur Rücktransformation von $f(p)$ können verschiedene Wege eingeschlagen werden, je nachdem ob $n(x)$ für kleine oder für große x berechnet werden soll. Wir interessieren uns hier nur für das asymptotische Verhalten von $n(x)$ für große x . Unter den vorliegenden Voraussetzungen ($x_0 > 0$, $a_0 > 0$) hat $f(p)$ im Endlichen nur Pole erster Ordnung als Singularitäten. Der Pol p_0 mit dem größten Realteil ist die reelle Lösung $p_0 = \alpha$ der Gleichung $p - a_0(2e^{-px_0} - 1) = 0$. Die Realteile der anderen Pole sind alle kleiner als α . Da $n(x)$ und $f(p)$ die Voraussetzungen des 2. TAUBERSchen Satzes funktionentheoretischer Art¹⁵ erfüllen, gilt somit asymptotisch für $x \rightarrow \infty$

$$n(x) \sim R(\alpha) \cdot e^{\alpha x}. \quad (51)$$

Dabei ist $R(\alpha)$ das Residuum von $f(p)$ bei $p = \alpha$, für das sich

$$R(\alpha) = \frac{\alpha + a_0(1 - e^{-\alpha x_0})}{\alpha \cdot (1 + 2a_0 x_0 e^{-\alpha x_0})} \quad (52)$$

ergibt. Unter Benutzung der zwischen a_0 , x_0 und α bestehenden Beziehung [siehe Gl. (30)] erhält man für $n(x)$ die asymptotische Darstellung

$$n(x) \sim \frac{e^{-\alpha x_0}}{2(1+\alpha x_0) e^{-\alpha x_0} - 1} e^{\alpha x}. \quad (53)$$

¹⁵ G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation, Springer-Verlag, Berlin 1937, S. 222.